

Лекция 2. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі. Матрицаның рангі.

A^{-1} матрицасын A квадрат ($m=n$) матрицасына кері деп атайды, егер $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ шарт орындалса,

мұндағы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - бірлік матрица.

A квадрат матрицасы үшін $\det A = 0$ болса, онда оны **өзгеше матрица** дейді. Кері матрица тек өзгеше емес квадрат матрица үшін бар болады.

Теорема. Егер квадрат A матрицасының анықтаушы $|A| \neq 0$ болса, онда оның жалғыз кері матрицасы бар және ол былайша есептеледі:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} (A_{ij})^T$$

мұндағы Δ - матрицаның анықтаушы; A_{ij} - A матрицасының a_{ij} элементінің алгебралық толықтаушысы;

$(A_{ij})^T$ - алгебралық толықтауыштардан құралған транспонирленген матрица (немесе A матрицасының қосалқы матрицасы)

Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасына кері матрицаны табыңыз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0.$$

$$A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{13} = -1, A_{21} = 2, A_{22} = 0, A_{23} = -2, A_{31} = -1, A_{32} = 1, A_{33} = 1$$

Сонда кері матрица былай болады: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

A матрицасының **рангі** деп, осы матрицаның нолге тең емес минорларының ең үлкен ретін атайды және оны $r(A)$ немесе $\text{rang } A$ деп белгілейді.

Элементар түрлендірулер әдісі арқылы (Гаусс әдісі) A матрицасы сатылы матрица түріне келтіріледі. Нолге тең емес жолдар саны A матрицасының рангі болады.

Матрицаларды элементар түрлендіру деп мына түрлендіруді айтады :

- а) матрицаның i - жолын (бағаның) $k \neq 0$ санға көбейту;
- б) i - жолға (бағанға) j - жолды (бағанды) $k \neq 0$ санға көбейтіп қосу;
- с) i - жолмен (бағанмен) j - жолдың (бағаның) орындарын ауыстыру.

Мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Демек ранг, $r(A) = 2$.

n белгісізі бар $x_1, x_2, \dots, x_n$ m сызықтық теңдеулер жүйесі былай жазылады :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

мұндағы a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) сандары жүйенің коэффициенттері, ал $b_1, b_2, \dots, b_m$ сандары -бос мүшелер деп аталады.

Жүйені матрицалық түрде былай жазуға болады $AX = B$ немесе

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}}_B, \quad \text{мұндағы } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{жүйе матрицасы.}$$

Егер $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сандар жиыны (2.1) теңдеулер жүйесін тепе-теңдікке айналдырса, онда бұл сандар жиыны осы **жүйенің шешімі** деп аталады.

Егер теңдеулер жүйесінің кемінде бір шешімі бар болса, онда **жүйе үйлесімді** деп аталады, ал жүйенің бір де шешімі болмаса, онда **жүйе үйлесімсіз** деп аталады.

Егер A матрицасын бос мүшелерден тұратын бағанмен толықтырса, онда пайда болған матрицаны **кеңейтілген матрица** дейді және оны $\bar{A}$ деп белгілейді.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Кронекера-Капелли теоремасы. (2.1) сызықтық теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін матрицасының рангі кеңейтілген матрицаның рангіне тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни : $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Егер $\text{rang } A < \text{rang } \bar{A}$, онда жүйе үйлесімсіз.

Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу тәсілдері.

а) Крамер әдісі

n белгісізі бар n теңдеулер жүйесі берілсін :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.2)$$

Мұндай жүйенің A матрицасы квадрат матрица болады.

Егер жүйенің анықтаушы $\det A \neq 0$, онда жүйенің жалғыз шешімі бар және ол шешім **Крамер формулаларымен** табылады :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (2.3)$$

мұндағы $\Delta_k (k=1,2,\dots,n)$ - Δ - анықтаушындағы k -бағанының элементтерін жүйенің сәйкес бос мүшелерімен орын алмастырғандағы анықтаушы.

Мысал. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесін Крамер ережесімен шешу керек.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 \quad x_1 = \frac{7}{7} = 1, \quad x_2 = \frac{14}{7} = 2 \quad \text{Жауабы: } (1, 2)$$

б) Матрицалық әдіс

$m = n$ болғанда (2.2) жүйесінің матрицалық түрі : $AX = B$

мұндағы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$

Егер $\Delta = \det A \neq 0$, онда (2.2) жүйесінің шешімі $X = A^{-1}B$ болады, мұндағы A^{-1} - A матрицасының кері матрицасы.

Мысал. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесін матрицалық әдіспен шешу керек.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad A_{11} = 3, \quad A_{12} = -1, \quad A_{21} = 1, \quad A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0+7 \\ 0+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Жауабы: } (1, 2)$$

с) Гаусс әдісі

Бұл әдісті қолдану теңдеулер саны көп болғанда ұтымды. Гаусс әдісі берілген жүйенің кеңейтілген матрицасын үшбырышты матрицаға түрлендіруге негізделген.

Мысал. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$ жүйесін Гаусс әдісімен шешу керек.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & 3 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad . \text{ Осыдан } \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 5 - x_3 = 5 - 2 = 3 \\ x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 3 - 2 = 1 \end{cases} \quad . \quad \text{Жауабы: } (1; 3; 2)$$